المحاضرة السادسة   الحلول العددية للمعادلات غير الخطية

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على المجال $[a,b]$، عندئذ إذا كان $f(a)\cdot f(b)<0$ فإنَّ المعادلة $f(x)=0$ تملك حلاً في المجال $[a,b]$، وللبحث عن قيمة تقريبية لحل المعادلة في المجال $[a,b]$ سنتبع إحدى الطريقتين:

6.1. طريقة تنصيف المجال.

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على المجال $[a,b]$، ولنفرض أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تملك حلاً في المجال $[a,b]$، عندئذ للبحث عن حل تقريبي للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$ نعين النقطة $x_0=\frac{a+b}{2}$ منتصف المجال $[a,b]$ ثم نختار المجال الذي يحوي جذر المعادلة $f(x)=0$ من بين المجالين $[a,x_0],[x_0,b]$، وبتكرار هذه الخطوة عدد من المرات نحصل على متتالية من الأعداد الحقيقية:

$$x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots.$$

تكون القيمة x_n هي القيمة التقريبية المطلوبة للحل إذا تحقق الشرط $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ حيث إنَّ $\varepsilon>0$ قيمة معطاة وكلما كانت قيمة ε صغيرة كان الحل التقريبي أقرب إلى القيمة الحقيقية.

مثال 1.[1]

استخدم طريقة تنصيف المجال لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة $x^2-\ln x-2=0$ في المجال $[1,2]$ علماً أنَّ $\varepsilon=0.07$.

الحل.

نلاحظ أنَّ الدالة $f(x)=x^2-\ln x-2$ معرفة على المجال $[1,2]$ وأنَّ:

$$f(1)\cdot f(2)=-1\times 1.3068<0$$

وبالتالي المعادلة المفروضة تملك حلاً في المجال $[1,2]$.

$$x_0=\frac{1+2}{2}=1.5$$
$$f(1)\times f(1.5)=-1\times -0.1554>0$$
$$f(1.5)\times f(2)=-0.1554\times 1.3068<0$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[1.5,2]$.

$$x_1=\frac{1.5+2}{2}=1.75$$
$$f(1.5)\times f(1.75)=-0.1554\times 0.5028<0$$
$$f(1.75)\times f(2)=0.5028\times 1.3068>0$$
$$|x_1-x_0|=0.25>0.07$$

---

[1] في الآلة الحاسبة نوع *CASIO* يمكن حل بعض المعادلات غير الخطية، لكنها لاتعطي إلا حلاً واحداً، فمثلاً لحل المعادلة $x^2-\ln x-2=0$ ندخل المعادلة (مع الانتباه إلى أنَّ = تظهر بعد الضغط على ALPHA ثم CALC) بعد ذلك نضغط SHIFT ثم CALC (*SOLVE*).

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[1.5,1.75]$.

$$x_2=\frac{1.5+1.75}{2}=1.625$$

$$f(1.5)\times f(1.625)=-0.1554\times 0.1551<0$$

$$f(1.625)\times f(1.75)=0.1551\times 0.5028>0$$

$$|x_2-x_1|=0.125>0.07$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[1.5,1.625]$.

$$x_3=\frac{1.5+1.625}{2}=1.5625$$

نلاحظ أنَّ $|x_3-x_2|=0.0625<0.07$ وبالتالي الحل التقريبي المطلوب للمعادلة المفروضة هو $x_3=1.5625$.

مثال.2.

استخدم طريقة تنصيف المجال لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة $x^4+2x^3-x-1=0$ في المجال $[0,1]$ علماً أنَّ $\varepsilon=0.05$.

الحل.

نلاحظ أنَّ الدالة $f(x)=x^4+2x^3-x-1$ معرفة على المجال $[0,1]$ وأنَّ:

$$f(0)\cdot f(1)=-1\times 1<0$$

وبالتالي المعادلة المفروضة تملك حلاً في المجال $[0,1]$.

$$x_0=\frac{0+1}{2}=0.5$$

$$f(0)\times f(0.5)=-1\times -1.1875>0$$

$$f(0.5)\times f(1)=-1.1875\times 1<0$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[0.5,1]$.

$$x_1=\frac{0.5+1}{2}=0.75$$

$$f(0.5)\times f(0.75)=-1.1875\times -0.5898>0$$

$$f(0.75)\times f(1)=-0.5898\times 1<0$$

$$|x_1-x_0|=0.25>0.05$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[0.75,1]$.

$$x_2=\frac{0.75+1}{2}=0.875$$

$$f(0.75)\times f(0.875)=-0.5898\times 0.05102<0$$

$$f(0.875)\times f(1)=0.05102\times 1>0$$

$$|x_2-x_1|=0.125>0.05$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[0.75, 0.875]$.

$$x_3 = \frac{0.75 + 0.875}{2} = 0.8125$$

$$f(0.75) \times f(0.8125) = -0.5898 \times -0.3039 > 0$$

$$f(0.8125) \times f(0.875) = -0.3039 \times 0.05102 < 0$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0625 > 0.05$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب يقع في المجال $[0.875, 0.8125]$.

$$x_4 = \frac{0.875 + 0.8125}{2} = 0.84375$$

نلاحظ أنَّ $|x_4 - x_3| = 0.03125 < 0.05$ وبالتالي الحل التقريبي المطلوب للمعادلة المفروضة هو $x_4 = 0.84375$.

6.2. طريقة نيوتن – رافسون.

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على المجال $[a,b]$، ولنفرض أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تملك حلاً في المجال $[a,b]$، وأنَّ $f'(x), f''(x) \neq 0$ وذلك أياً كان $x \in [a,b]$.

لتكن $x_0 \in [a,b]$ بحيث إنَّ $f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ ، ونعين المتتالية التي عناصرها:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

تكون القيمة x_n هي القيمة التقريبية المطلوبة للحل إذا تحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ حيث إنَّ $\varepsilon > 0$ قيمة معطاة وكلما كانت قيمة ε صغيرة كان الحل التقريبي أقرب إلى القيمة الحقيقية.

مثال.1.

استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة $x^2 - \ln x - 2 = 0$ في المجال $[1,2]$ علماً أنَّ $\varepsilon = 0.05, x_0 = 1.5$.

الحل.

نلاحظ أنَّ الدالة $f(x) = x^2 - \ln x - 2$ معرفة على المجال $[1,2]$ وأنَّ:

$$f(1) \cdot f(2) = -1 \times 1.3068 < 0$$

وبالتالي المعادلة المفروضة تملك حلاً في المجال $[1,2]$. ونلاحظ أنَّ:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} \neq 0$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} \neq 0$$

وذلك أياً كان $x \in [1,2]$. كما أنَّ:

$$f'(x_0)\cdot f''(x_0) = 2.8333 \times 2.4444 > 0$$

لدينا:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5666$$

$$|x_1 - x_0| = 0.0666 > 0.05$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5644$$

$$|x_2 - x_1| = 0.0022 < 0.05$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب للمعادلة المفروضة هو $x_2 = 1.5644$.

مثال.2.

استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ في المجال $[1,2]$ علماً أنَّ $\varepsilon = 0.001, x_0 = 2$.

الحل.

نلاحظ أنَّ الدالة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ معرفة على المجال $[1,2]$ وأنَّ:

$$f(1)\cdot f(2) = -4 \times 3 < 0$$

وبالتالي المعادلة المفروضة تملك حلاً في المجال $[1,2]$. ونلاحظ أنَّ:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$f''(x) = 6x + 2 \neq 0$$

وذلك أياً كان $x \in [1,2]$. كما أنَّ:

$$f'(x_0)\cdot f''(x_0) = 13 \times 14 > 0$$

لدينا:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.769230769 \qquad |x_1 - x_0| = 0.23 > 0.001$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.73292381 \qquad |x_2 - x_1| = 0.036 > 0.001$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.732051306 \qquad |x_3 - x_2| = 0.00087 < 0.001$$

وبالتالي الحل التقريبي المطلوب للمعادلة المفروضة هو $x_3 = 1.732051306$.